Bir Buluşum Var

Bir Sayma Sayısını Bölebilen Doğal Sayıların Toplamı

Bilinen yöntem:

$A \in N^+$ *ve* $a \neq b \neq c$ olan asal sayılar olmak üzere;

$A = a^m.b^n.c^p$ olsun

A sayısını bölebilen doğal sayıların toplamı;

$\frac{a^{m+1}-1}{a-1}.\frac{b^{n+1}-1}{b-1}.\frac{c^{p+1}-1}{c-1}$ olduğunu biliyoruz.

Örnek:

$3 \rightarrow 4$

$\times 2 \downarrow$

$6 \rightarrow 12 \rightarrow 4 \times 3$

$\times 2 \downarrow$

$12 \rightarrow 28 \rightarrow 12 \times 2 + 4$

$\times 2 \downarrow$

$24 \rightarrow 60 \rightarrow 28 \times 2 + 4$

Bulduğumuz yöntem:

Öncelikle unutmayınız ki geliştirdiğimiz yöntem sadece, herhangi bir asal sayıyla genişlettiğimizde ya da sadeleştirdiğimizde işimize yarayabilir.

Örnekte görüldüğü gibi 3 sayısını asal olan 2'yle çarptık. 3 küçük bir sayı olduğu için bölenlerinin toplamını rahatlıkla bulabiliriz. Ancak sayımız büyüdükçe bölenlerin toplamlarını bulmak zorlaşacaktır. Buluduğumuz yöntem 2 basamaktan oluşmaktadır.

Basamak1: Her zaman küçük sayıdan büyüğe doğru işlem yapılırken, sayımızı hangi asal sayıyla çarptıysak, bulduğumuz sayının bölenleri toplamı bir önceki sayının bölenleri toplamının (asal sayımız+1) katına eşittir. Bu işlem sadece 1. basamaktır ve bir kez yapılır.

Basamak2: 1. basamak gerçekleştikten sonra diğer sayıların bölenleri toplamı içinse;

bir önceki sayının bölenleri toplamı X Asal sayı +en küçük sayının bölenleri toplamı

$5 \rightarrow 6$

$\times 3 \downarrow$

$15 \rightarrow 24 \rightarrow 4 \times 6$

$\times 3 \downarrow$

$45 \rightarrow 78 \rightarrow 24 \times 3 + 6$

$\times 3 \downarrow$

Yazdığımız bu 2 basamağı her yerde kullanamıyoruz. Örneğin sayımızı "8, 4 .." gibi asal olmayan sayılarla genişlettiğimizde ya da sadeleştirdiğimizde kuralımız geçerli değildir. Ama matematik hayatın kendisidir ve bizler hayatı kolaylaştırmak zorundayız. Ve biz eminiz ki yazdığımız bu kural kolaylıkların sadece bir tanesidir.

Ersin Göktaş-Yeşim Polat/İnönü Lisesi

Şık Bir Formül

Merhaba,

Öncelikle matematik severlere böyle bir köşe ayırdığınız için size ve ekibinize teşekkür etmek istiyorum. Bu sene lise 2. sınıfa geçtim. $x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x^1 + x^0$ toplamını hesaplamak uzun sürdüğünden bunun kısa yoldan hesaplanmasını sağlayan bir formül bulmak için uğraştım ve buldum. Formülü şöyle buldum:

$$x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x^1 + x^0 = \frac{(x-1)(x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x^1 + x^0)}{(x-1)}$$

$$= \frac{x^{n+1} - x^n + x^n - x^{n-1} + ... + x^3 - x^2 + x^2 - x^1 + x^1 + x^0}{(x-1)}$$

$$= \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

...Kesirli ve negatif sayılarla denediğimde de sonuç yine doğru çıkıyor. Bu formülün daha önceden de bilinip bilinmediği konusunda beni bilgilendirirseniz sevinirim.

Çağatay Kerem Dönmez/Karadeniz Ereğli/Zonguldak

İki okuyucumuza da buluşlarını bizlerle paylaştıkları için teşekkür ediyoruz. Söze ikinci okuyucumuzun gönderdiği oldukça şık formülle başlamak istiyorum. Gerçi bu formül daha önceden bilinen bir formüldür. Öğrencimiz 10 .sınıfa yeni geçtiğinden, bu formülle henüz karşılaşmamış olması doğal. Çünkü bu, 10 sınıfta matematik dersinde gösterilen "diziler ve seriler" konusu içinde öğrencilerimize verilir ama çoğu zaman formül ispatsız verildiğinden çok anlam ifade etmeyebilir. Arkadaşımız formülü, o estetik çıkışıyla birlikte sunmuş bizlere. Kabul etmek gerekir ki (x-1) ile çarpıp bölmek çok zekice bir fikir!

Benim amacım yine iki mektup arasında bir ilişki kurmak. Bu seferki ilişkiyi daha dikkatli incelerseniz keşfedebilirisiniz. ilk mektuptaki formüllere yakından bir bakalım:

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{ve} \quad \frac{a^{m+1}-1}{a-1}.\frac{b^{n+1}-1}{b-1}.\frac{c^{p+1}-1}{c-1}$$

x, a, b ya da c; n veya m,p... Tanımlı olduğu kümeler aynı olduğu için aslında bunlar aynı sayıları temsil eden harfler.

İlk mektubumuzun sahibi olan arkadaşlarımız Ersin ve Yeşim, sayılar arasında ilişki kurmuş. Gerçi kurdukları bu ilişkilerin temeli yine ilk başta belirttikleri formüle dayanıyor. Unutmayın ki, sayılar arasında formülle belirtilmiş bir ilişki varsa sizin ortaya çıkardığınızı düşündüğünüz, farklı gibi gözüken diğer bağıntılar da yine mutlaka o formüle dayalıdır ve onlarla açıklanabilir. Arkadaşlarımızın ürettiği bağıntılar da her ne kadar formülsüz elde edilmiş gibi görünse de yine formülü temel alıyor. Sayılar ve formül ilişkisini ortaya çıkarmayı bu seferlik siz okuyucularıma bırakıyorum. Ben, yazımın kalan kısmında neden $\frac{a^{m+1}-1}{a-1}.\frac{b^{n+1}-1}{b-1}.\frac{c^{p+1}-1}{c-1}$ şeklindeki formülün $A = a^m.b^n.c^p$ sayısına ait tüm pozitif bölenlerin toplamını verdiğini açıklamak istiyorum.

Bir örnek üzerinde çalışalım:

$72 = 2^3.3^2$ in tüm pozitif bölenlerini yazıp toplayalım

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2.3 + 2^2.3 + 2^3.3 + 2.3^2 + 2^2.3^2 + 2^3.3^2$$

Kısacası 1,2,2,2 ve 3,3 sayılarının çarpımlarıyla oluşabilecek tüm varyasyonlarını yazdık. Toplamayı kolay hale getirmek için ortak çarpan parantezlerine alalım:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^0(2 + 2^2 + 2^3) + 3^1.(2 + 2^2 + 2^3) + 3^2.(2 + 2^2 + 2^3)$$

$$= (3^0 + 3^1 + 3^2) + (2 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)$$

$$= (3^0 + 3^1 + 3^2)(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$$

İki çarpan haline gelmiş bu sayıları ikinci mektubun sahibi Çağatay arkadaşımızın verdiği formülle hesaplayacak olursak:

$\frac{3^{2+1}-1}{3-1}.\frac{2^{3+1}-1}{2-1}$ şeklinde bir çarpım elde ederiz ki bu da ilk mektubumuzun en başında "bilinen yöntem" olarak ifade edilen formül. Bu yaptığımız ispat değil elbette. İspatı yazmak için 72 yerine

$B = a_0^{m_0} a_1^{m_1} .... a_n^{m_n}, \; n \in N$

şeklindeki genel bir ifade için aynı işlemleri tekrarlamanız lazım. Ama bu basamakları örnek üzerinde çıkarttıktan sonra genel bir ifadeye uygulamak kolay. Bu kısmı da size kalsın. Mutlaka uygulayın ve matematiğinizi geliştirmek istiyorsanız ispatları geçiştirmeyi aklınızdan bile geçirmeyin.

Nilüfer Karadağ Özdem

karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA